บทที่ 2

ลิมิตและความต่อเนื่อง

2.1 แนวความคิดเกี่ยวกับลิมิต

การศึกษาเรื่องลิมิตของฟังก์ชันเป็นสิ่งจำเป็นมากสำหรับวิชาแคลคูลัส เพราะลิมิตของฟังก์ชันเป็นแนวความคิดไปสู่การศึกษาเรื่องอื่นๆ เช่น อนุพันธ์ และปริพันธ์ เป็นต้น

ก่อนที่จะกล่าวถึงเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน จะเริ่มต้นด้วยการพิจารณาค่าของฟังก์ชันเพื่อเป็นแนวทางไปสู่เรื่องลิมิต

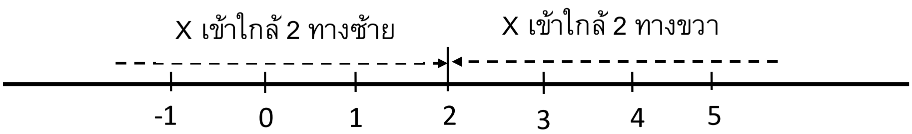
พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

จากฟังก์ชันที่กำหนดจะพบว่า f(x) จะมีค่าเท่าใดนั้นต้องขึ้นอยู่กับค่าของ x กล่าวคือ ถ้าค่า x เปลี่ยนแปลงไปแล้ว ค่าของ f(x) ก็จะเปลี่ยนตามไปด้วย จาก f(x) ที่กำหนดให้ข้างต้น จะพบว่า

ในกรณีที่ x = 2 จะเห็นได้ชัดเจนว่า เราไม่สามารถหาค่า f(x) ได้ ทั้งนี้เพราะว่า 2 **ไม่อยู่ในโดเมนของ f** และ $f(2)=\dfrac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีความหมาย

แต่สิ่งที่เราทำได้ ก็คือพยายามหาค่าที่ใกล้เคียงที่สุด กล่าวคือ เราจะหาค่าของ f(x) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 มากที่สุด $x \neq 2$

ก่อนอื่นขอให้พิจารณาคำว่า “x มีค่าเข้าใกล้ 2” เสียก่อน โดยดูจากเส้นจำนวน ดังนี้



จะพบว่า คำว่า “x มีค่าใกล้ๆ 2” นั้น เกิดขึ้นได้ 2 กรณี ซึ่งต้องพิจารณาทั้ง 2 กรณี

กรณีที่ 1 **x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย** (x มีค่าน้อยกว่า 2)

กรณีที่ 2 **x เข้าใกล้ 2 ทางขวา** (x มีค่ามากกว่า 2)

ดังนั้น ในการหาค่า f(x) ขณะที่ x เข้าใกล้ 2 ต้องพิจารณาทั้งสองทางดังนี้

$x<2$	
x	$f(x)$
1.0000	3.0000
1.5000	3.5000
1.6500	3.6500
1.9000	3.9000
1.9900	3.9900
1.9990	3.9990
1.9999	3.9999

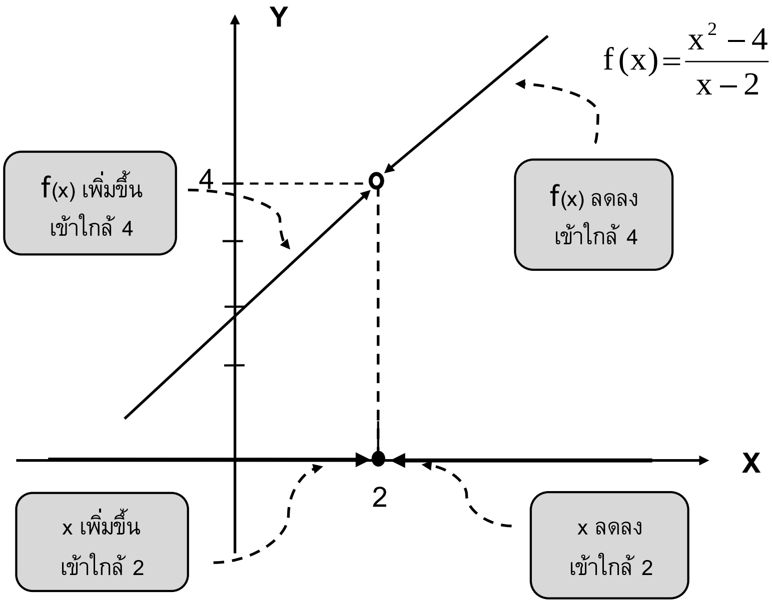
$x>2$	
x	$f(x)$
3.0000	5.0000
2.5000	4.5000
2.3500	4.3500
2.1000	4.1000
2.0100	4.0100
2.0010	4.0010
2.0001	4.0001

สังเกตค่าของฟังก์ชัน ณ จุด x ใกล้ 2 จากตาราง พบว่า

เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จากทางซ้าย $(x<2)$ เขียนแทนด้วย $x \to 2^-$ ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ จะเข้าใกล้ 4 กรณีนี้ เราจะกล่าวว่า 4 เป็นลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จากทางซ้าย และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$

เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จากทางขวา $(x>2)$ เขียนแทนด้วย $x \to 2^+$ ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ จะเข้าใกล้ 4 กรณีนี้ เราจะกล่าวว่า 4 เป็นลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จากทางขวา และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4$

เพื่อให้เห็นภาพของฟังก์ชันชัดเจนขึ้น ขอให้สังเกตกราฟต่อไปนี้ประกอบการทำความเข้าใจ



จากตัวอย่างแสดงให้เห็นว่า ไม่ว่า x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายหรือทางขวา ผลก็คือ f(x) มีค่าเข้าใกล้ 4 เหมือนกัน ในลักษณะเช่นนี้ สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \text{ หรือ } \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

จากกรณีที่กล่าวมาแล้วสามารถเขียนเป็นบทนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 2.1 กำหนดฟังก์ชัน y = f(x) และ c, L เป็นค่าคงตัว ถ้าค่าของฟังก์ชัน f(x) มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ c เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

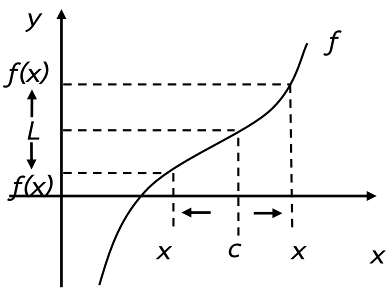
และอ่านว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ c เท่ากับ L

ข้อสังเกต

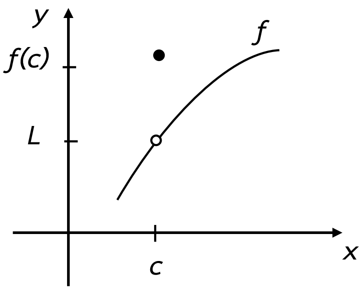
1. จากนิยามแนวคิดเกี่ยวกับลิมิตอาจจะแสดงออกมาโดยกราฟได้ ดังรูป 2.1 เส้นโค้งแทนกราฟของฟังก์ชัน f(x) จำนวนคงที่ c ปรากฏบนแกน x ลิมิต L ปรากฏบนแกน y ขณะที่ x เข้าใกล้ c ตามแกน x จะพบว่า f(x) เข้าใกล้ L ตามแกน y

2. ในการคำนวณค่าลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ c ไม่จำเป็นที่ x จะต้องนิยามที่ c (หาค่าได้ที่ c) เนื่องจากเราคำนึงแต่เพียงว่า ค่าของฟังก์ชัน f(x) มีค่าอย่างไร เมื่อ x ใกล้ๆ c เท่านั้น ดังแสดงในรูป 2.2 กราฟของ f(x) ขาดตอนที่ c ถึงอย่างไรก็ยังสรุปได้ว่า

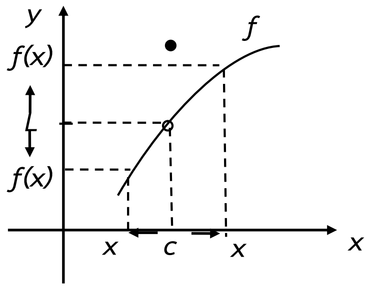
$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{ดังรูป 2.3}$$



รูป 2.1



รูป 2.2



รูป 2.3

ตัวอย่าง 2.1 จงพิจารณาลักษณะของลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ $x \to 1$ และ $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$

วิธีทำ ค่าของฟังก์ชัน f หาค่าไม่ได้ เมื่อ x = 1 เพราะว่าที่จุดนี้ค่าของ f(x) อยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$ แต่ฟังก์ชัน f หาค่าได้ทุกๆ จำนวน $x \neq 1$ ถ้าเราพิจารณา x เข้าใกล้ 1 จะได้ว่า

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1 \quad , (x \neq 1)$$

และ $\dfrac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1$ จะเข้าใกล้ $1^2+1+1 = 3$

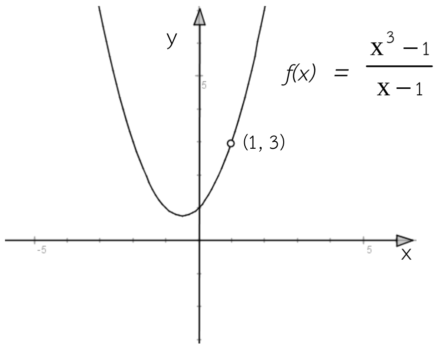
ดังแสดงค่า f(x) ในตาราง 2.1 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1} = 3$ ดูรูป 2.4

x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย → ← x เข้าใกล้ 1 ทางขวา

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
F(x)	2.313	2.71	2.97	2.997	?	3.003	3.03	3.31	3.813

f(x) เข้าใกล้ 3 → ← f(x) เข้าใกล้ 3

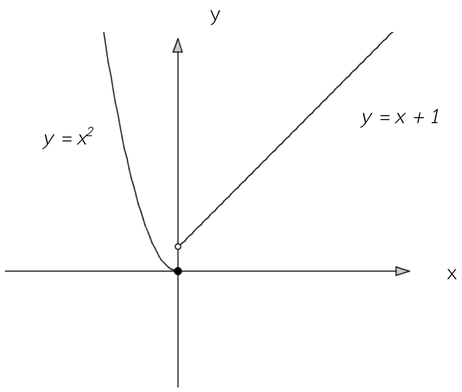
ตาราง 2.1



รูป 2.4

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณาฟังก์ชัน f กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \le 0 \\ x+1 & , x > 0 \end{cases}$

ดังแสดงในรูป 2.5 มีลิมิตที่ x = 0 หรือไม่



วิธีทำ จากรูป 2.5 พบว่า $x \le 0$ f มีกราฟเป็นพาราโบลาหงาย และเมื่อ $x > 0$ มีกราฟเป็นเส้นตรงมีความชันเท่ากับ 1 และผ่านจุด (1, 2)

ดังนั้น เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางขวา ค่าของฟังก์ชัน f เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย ค่าของฟังก์ชัน f เข้าใกล้ 0 พบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ค่าของฟังก์ชัน f เข้าใกล้จำนวนจริงมากกว่าหนึ่งค่าในลักษณะเช่นนี้ เรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2 กำหนดฟังก์ชัน y = f(x) และ c, L เป็นค่าคงตัว ถ้าค่าของฟังก์ชัน f(x) มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ c ทางขวา เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

และอ่านว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ c ทางขวา เท่ากับ L

บทนิยาม 2.3 กำหนดฟังก์ชัน y = f(x) และ c, L เป็นค่าคงตัว ถ้าค่าของฟังก์ชัน f(x) มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ c ทางซ้าย เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

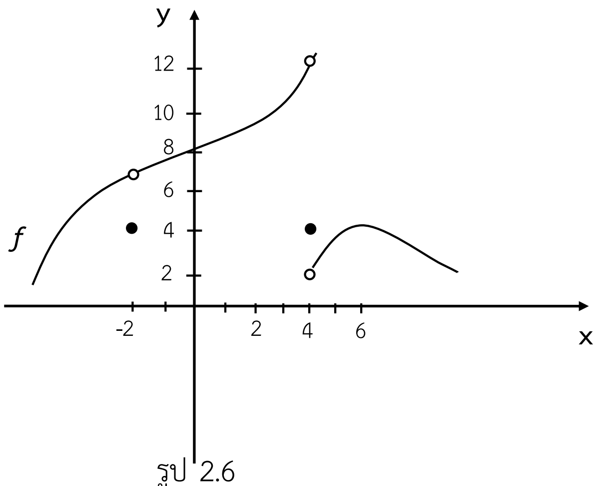
และอ่านว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ c ทางซ้าย เท่ากับ L

จากตัวอย่าง 2.2 จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ ซึ่งลิมิตทั้งสองข้างของฟังก์ชันไม่เท่ากัน ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน f หาค่าไม่ได้ ดังนิยามต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 ฟังก์ชัน f(x) มีลิมิตเท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้ c ก็ต่อเมื่อ ลิมิตทางขวาและลิมิตทางซ้าย หาค่าได้และมีค่าเท่ากัน เมื่อ x เข้าใกล้ c เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^+} f(x) = L \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

ตัวอย่าง 2.3 สำหรับฟังก์ชัน f ซึ่งมีกราฟดังรูป 2.6



รูป 2.6

จงพิจารณา 1. $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x)$ และ $f(-2)$

2. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ และ $f(4)$

วิธีทำ 1 จากกราฟของ f พบว่า

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = 7 \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to(-2)^+} f(x) = 7$$

ดังนั้น จากทฤษฎี 2.1 จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x) = 7$ และ $f(-2) = 4$

วิธีทำ 2 จากกราฟของ f พบว่า

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 12 \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$$

เนื่องจากลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวามีค่าต่างกัน จากทฤษฎี 2.1 จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ หาค่าไม่ได้ และ $f(4) = 4$ ❐

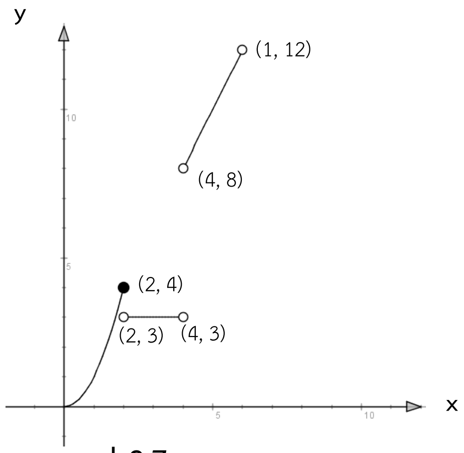
ตัวอย่าง 2.4 จากกราฟของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x^2 , & 0 \le x \le 2 \\ 3 , & 2 < x < 4 \\ 2x , & 4 \le x < 6 \end{cases}$$

จงหาค่า 1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ 4. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

5. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 6. $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ 7. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ 8. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

วิธีทำ



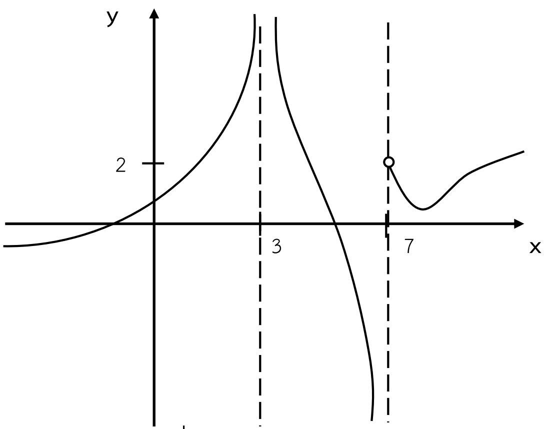
รูป 2.7

จากกราฟรูป 2.7 จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ 2. $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=12$ 3. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3$ 4. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4$

5. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ 6. $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=3$ 7. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=8$ 8. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 2.5 กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f(x) ดังแสดงในรูป 2.7



รูป 2.7

จงหา 1. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

วิธีทำ 1. เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทั้งสองข้าง จะพบว่า f(x) มีค่าเป็นจำนวนบวกที่มากขึ้นเรื่อยๆ ไม่เข้าใกล้ค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้

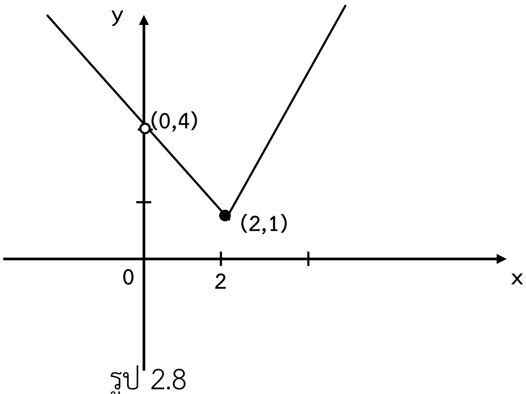
2. เมื่อ x เข้าใกล้ 7 ทางซ้าย f(x) จะมีค่าเป็นจำนวนลบที่น้อยลงเรื่อยๆ ไม่เข้าใกล้ค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้ และเมื่อ x เข้าใกล้ 7 ทางขวา f(x) เข้าใกล้ 2

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=2$

จากทฤษฎี 2.1 จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 2.6 กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f(x) ดังแสดงในรูป 2.8 จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$



รูป 2.8

วิธีทำ 1. จากกราฟจะได้ว่า

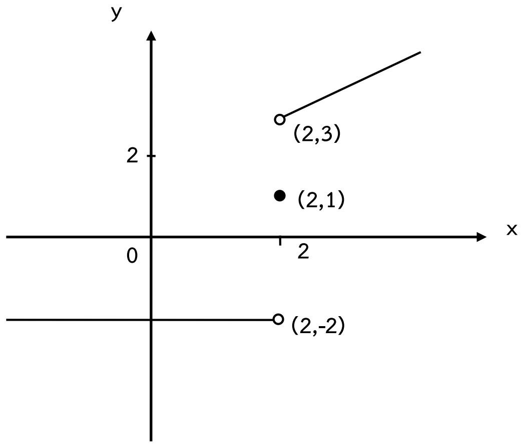
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 4$ และ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 4$

2. จากกราฟจะได้ว่า

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

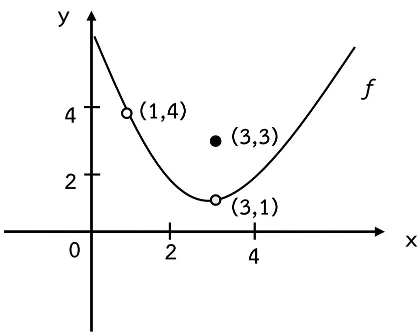
แบบฝึกหัด 2.1

1. จากกราฟของฟังก์ชัน f(x) ที่กำหนดให้ จงหา



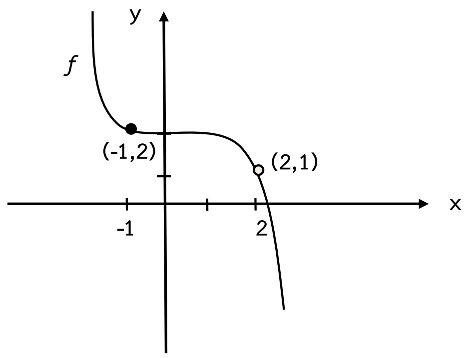
1. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ 2. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$
3. $\lim_{x\to 2} f(x)$ 4. $f(2)$

2. จากกราฟของฟังก์ชัน f(x) ที่กำหนดให้ จงหา



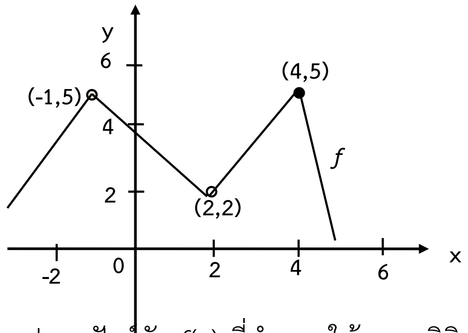
1. $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ 2. $\lim_{x\to 3^+} f(x)$
3. $\lim_{x\to 3} f(x)$ 4. $f(3)$
5. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ 6. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$
7. $\lim_{x\to 1} f(x)$ 8. $f(1)$

3. จากกราฟของฟังก์ชัน f(x) ที่กำหนดให้ จงหาค่าต่อไปนี้



1. $\lim_{x\to -1} f(x)$ และ $f(-1)$
2. $\lim_{x\to 2} f(x)$ และ $f(2)$

4. จากกราฟของฟังก์ชัน f(x) ที่กำหนดให้ จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

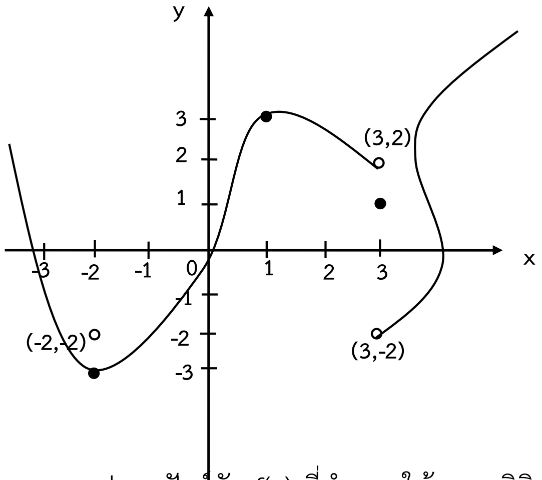


1. $\lim_{x \to -1} f(x)$

2. $\lim_{x \to 2} f(x)$

3. $\lim_{x \to 4} f(x)$

5. จากกราฟของฟังก์ชัน f(x) ที่กำหนดให้ จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

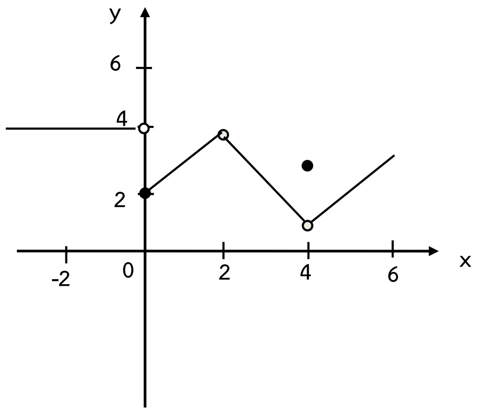


1. $\lim_{x \to 1} f(x)$

2. $\lim_{x \to 3} f(x)$

3. $\lim_{x \to -2} f(x)$

6. จากกราฟของฟังก์ชัน f(x) ที่กำหนดให้ จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้



1. $\lim_{x \to 0} f(x)$

2. $\lim_{x \to 2} f(x)$

3. $\lim_{x \to 4} f(x)$

2.2 บทนิยามของลิมิต

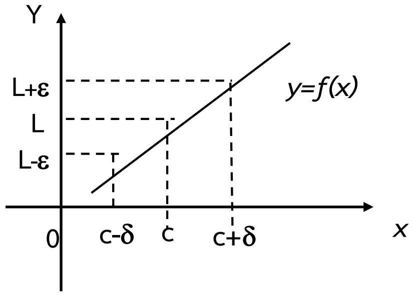
ในหัวข้อ 2.1 ได้กล่าวถึงความหมายของลิมิตโดยทั่วๆ ไปในเชิงกราฟ ซึ่งเป็นความหมายเบื้องต้นพร้อมทั้งการหาค่าของลิมิตจากกราฟ สำหรับหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงบทนิยามของลิมิตในเชิงคณิตศาสตร์

บทนิยาม 2.4 กำหนดให้ y = f(x) เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิด (ที่รวม x = c อยู่ด้วย) โดยที่ ณ ที่ x = c , f อาจจะไม่นิยามก็ได้ แล้ว $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

จากบทนิยาม 2.4 จะได้ว่า $|x - c| > 0$ แสดงว่า $x \neq a$ และ $|x - c| < \delta$ จะได้ว่า $a - \delta < x < a + \delta$ หรือ $x \in (a - \delta, a + \delta)$ และจาก $|f(x) - L| < \varepsilon$ จะได้ว่า $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ หรือ $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

จากบทนิยาม 2.4 สามารถเขียนกราฟแสดง $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ได้ดังรูปที่ 2.9



รูป 2.8

ตัวอย่าง 2.7 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 3}(4x - 5) = 7$

หลักในการพิสูจน์ จะต้องแสดงว่าทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุก x ,

$$0 < |x - 3| < \delta \ \Rightarrow \ |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

การหา δ (Finding δ) กำหนด $\varepsilon > 0$ ใดๆ จะต้องหา δ ซึ่ง

$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |x - 3| < \delta$

แต่ $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3|$ ดังนั้น เราต้องการ

$4|x - 3| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |x - 3| < \delta$

นั่นคือ $|x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ เมื่อ $0 < |x - 3| < \delta$

จากการแสดงข้างต้น เราควรเลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$

วิธีการแสดงว่า δ เป็นจริง กำหนด $\varepsilon > 0$ ใดๆ เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$

ดังนั้น ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $|(4x-5)-7| < \varepsilon$

นั่นคือ จากบทนิยามของลิมิต จะได้ $\lim_{x \to 3}(4x-5) = 7$ ❐

ตัวอย่าง 2.8 จงแสดงว่า $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = 5$

หลักในการพิสูจน์ จะต้องแสดงว่าทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุก x

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5\right| < \varepsilon$$

การหา δ (Finding δ) กำหนด $\varepsilon > 0$ ใดๆ จะต้องหา δ โดยที่

$$\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5\right| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |x-2| < \delta$$

พิจารณา เมื่อ $x \neq 2$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5\right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad |(2x+1)-5| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad |2(x-2)| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad |2||x-2| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

จากการแสดงข้างต้น เราควรเลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

วิธีการแสดงว่า δ เป็นจริง กำหนด $\varepsilon > 0$ ใดๆ เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

ถ้า $0 < |x-2| < \delta$ จะได้

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5\right| &= \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5\right| \\
&= |(2x+1)-5| \\
&= |2(x-2)| = 2|x-2| < 2\delta = \varepsilon
\end{aligned}$$

นั่นคือ จากบทนิยามของลิมิต สรุปได้ว่า $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = 5$ ❐

ตัวอย่าง 2.9 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 3} x^3 = 27$

หลักในการพิสูจน์ จะต้องแสดงว่าทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุก x

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x^3 - 27| < \varepsilon$$

การหา δ (Finding δ) กำหนด $\varepsilon > 0$ ใดๆ จะต้องหา δ ซึ่งทำให้

ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว $|x^3 - 27| < \varepsilon$

สร้างความเชื่อมโยงระหว่าง $|x-3|$ และ $|x^3 - 27|$ ดังนั้น

$$x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

นั่นคือ $|x^3 - 27| = |x-3||x^2+3x+9|$ (1)

หาขนาดของ $|x^2+3x+9|$ เมื่อ x ใกล้ๆ 3 เพื่อความสะดวกให้ x ห่างจาก 3 น้อยกว่า 1 หน่วย **(อาจจะเลือก x ให้ห่างจาก 3 ไม่เท่ากับ 1 หน่วย ก็ได้เช่นอาจจะให้ห่าง $\frac{1}{2}, 3, \frac{4}{5}$ ฯลฯ ก็ได้แต่ต้องใช้ 3 เป็นศูนย์กลาง)**

นั่นคือ

$$|x-3| < 1 \quad \rightarrow \quad -1 < x-3 < 1$$
$$\rightarrow \quad 2 < x < 4$$
$$\rightarrow \quad |x| < 4$$

และ

$$|x^2+3x+9| \leq |x^2| + |3x| + |9|$$
$$\leq |x|^2 + 3|x| + 9$$
$$< 4^2 + 3(4) + 9 = 37$$

จากสมการ (1) เราจะได้ว่า

ถ้า $|x-3| < 1$ แล้ว $|x^3 - 27| < 37|x-3|$ (2)

และถ้า $|x-3| < \frac{\varepsilon}{37}$ แล้ว $|x^3 - 27| < 37\,\frac{\varepsilon}{37} = \varepsilon$

ดังนั้นควรเลือก $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{37}\right\}$

วิธีการแสดงว่า δ เป็นจริง กำหนด $\varepsilon > 0$ ใดๆ เลือก $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{37}\right\}$ และสมมติว่า

ถ้า $0 < |x-3| < \delta$ จะได้ $|x-3| < 1$ และ $|x-3| < \frac{\varepsilon}{37}$ จากสมการ (2) จะได้

$|x^3 - 27| < 37|x-3| < 37\,\frac{\varepsilon}{37} = \varepsilon$

ดังนั้น จากบทนิยามของลิมิต จะได้ $\lim_{x\to 3} x^3 = 27$

ตัวอย่าง 2.10 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-5}{x-6}=-\dfrac{3}{2}$

หลักในการพิสูจน์ จะต้องแสดงว่าทุก $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งทุก x

$$0<|x-4|<\delta \Rightarrow \left|\frac{2x-5}{x-6}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right|<\varepsilon$$

การหา δ (Finding δ) กำหนด $\varepsilon>0$ ใดๆ จะต้องหา δ โดยที่

$$\left|\frac{2x-5}{x-6}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right|<\varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad 0<|x-4|<\delta$$

แต่

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x-5}{x-6}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right| &= \left|\frac{4x-10+3x-18}{2(x-6)}\right| \\ &= \left|\frac{7x-28}{2(x-6)}\right| \\ &= \frac{7}{2}\frac{|x-4|}{|x-6|} \qquad (1)\end{aligned}$$

จากสมการ (1) ถ้า $|x-4|<1$ จะได้

$$\begin{aligned}|x-4|<1 &\Rightarrow -1<x-4<1 \\ &\Rightarrow -3<x-6<-1 \\ &\Rightarrow 3>-(x-6)>1 \\ &\Rightarrow |-(x-6)|>1 \\ &\Rightarrow |x-6|>1\end{aligned}$$

ดังนั้นควรเลือก $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$

วิธีการแสดงว่า δ เป็นจริง กำหนด $\varepsilon>0$ ใดๆ เลือก $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$

ถ้า $0<|x-4|<\delta$ แล้ว $|x-4|<1 \Rightarrow 3<x<5 \Rightarrow |x-6|>1$ จะได้ $|x-4|<\dfrac{\varepsilon}{7}$

ดังนั้น $\left|\dfrac{2x-5}{x-6}-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right| = \dfrac{7}{2}\dfrac{|x-4|}{|x-6|} < \dfrac{7}{2}\dfrac{|x-4|}{1} < \dfrac{7}{2}\dfrac{\varepsilon/7}{1} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

นั่นคือ จากบทนิยามของลิมิต จะได้ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-5}{x-6}=-\dfrac{3}{2}$

□

แบบฝึกหัด 2.2

1. กำหนด $f(x)=k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to c} f(x)=k$
2. กำหนด $f(x)=x$ จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to c} f(x)=c$
3. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 3}(5x-2) = 13$
4. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 1}(2x+7) = 9$
5. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x-1) = -1$
6. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$
7. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-5}{2x-1} = -2$
8. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-x^2) = 4$
9. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$
10. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{16-x^2}{4+x} = 8$

2.3 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงกฎเกณฑ์ในการหาลิมิต ซึ่งจะช่วยให้เราคำนวณหาค่าของลิมิตได้สะดวกและรวดเร็วขึ้น เพราะว่าการศึกษาในระดับนี้มุ่งเน้นในเรื่องของการนำกฎเกณฑ์ไปใช้เพื่อคำนวณหาลิมิตมากกว่าการใช้ตารางค่าของฟังก์ชันหรือบทนิยามในการคำนวณหาลิมิต

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก k เป็นค่าคงตัว และ f(x) และ g(x) เป็นฟังก์ชันซึ่งหาลิมิตที่ x=c ได้

1. $\lim\limits_{x\to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x\to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x\to c} kf(x) = k\lim\limits_{x\to c} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x)$
6. $\lim\limits_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to c} g(x)\right]$
7. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$ ถ้า $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ หาค่าได้ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
9. $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ โดยที่ $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างแสดงการหาลิมิตโดยใช้ทฤษฎีบทที่กล่าวมาข้างต้น

ตัวอย่าง 2.11 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1) $\lim\limits_{x\to 3} 3x^2$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+1)$

3) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3)(x+2)$ 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x+7}{x^2+2x}$

วิธีทำ โดยใช้ทฤษฎีบท **2.2** จะได้

1) $\lim\limits_{x\to 3} 3x^2 = 3\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 3\left[\lim\limits_{x\to 3} x\right]^2 = 3(3)^2 = 27$

2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2+2x+1) &= \lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}2x+\lim_{x\to 1}1\\ &= \left[\lim_{x\to 1}x\right]^2+2\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1\\ &= (1)^2+2(1)+1\\ &= 4\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(x^2+3)(x+2) &= \left[\lim_{x\to 2}(x^2+3)\right]\cdot\left[\lim_{x\to 2}(x+2)\right]\\ &= \left[\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}3\right]\cdot\left[\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2\right]\\ &= \left[(2)^2+3\right]\cdot\left[2+2\right]\\ &= 7\cdot 4 = 28\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x+7}{x^2+2x} &= \frac{\lim\limits_{x\to -1}x^3-3x+7}{\lim\limits_{x\to -1}x^2+2x}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to -1}x^3-\lim\limits_{x\to -1}3x+\lim\limits_{x\to -1}7}{\lim\limits_{x\to -1}x^2+\lim\limits_{x\to -1}2x}\\ &= \frac{\left[\lim\limits_{x\to -1}x\right]^3-3\lim\limits_{x\to -1}x+\lim\limits_{x\to -1}7}{\left[\lim\limits_{x\to -1}x\right]^2+2\lim\limits_{x\to -1}x}\\ &= \frac{(-1)^3-3(-1)+7}{(-1)^2+2(-1)}\\ &= \frac{9}{-1} = -9\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.12 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{13-x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x^3+2x-4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$

วิธีทำ โดยใช้ทฤษฎีบท 2.2 จะได้

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 = \left[\lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}\right]^3$

$= \left[2-\frac{1}{2}\right]^3 = \left[\frac{3}{2}\right]^3 = \frac{27}{8}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{13-x^2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}\left[13-x^2\right]}$

$= \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}13-\lim\limits_{x\to 2}x^2}$

$= \sqrt{13-(2)^2}$

$= \sqrt{9} = 3$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x^3+2x-4} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}\left[x^3+2x-4\right]}$

$= \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}x^3+\lim\limits_{x\to 2}2x-\lim\limits_{x\to 2}4}$

$= \sqrt[3]{(2)^3+2(2)-4}$

$= \sqrt[3]{(2)^3+2(2)-4}$

$= \sqrt[3]{8} = 2$

4) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}}{\lim\limits_{x\to 4}x}$

$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 4}x^2+\lim\limits_{x\to 4}9}}{4}$

$= \frac{\sqrt{(4)^2+9}}{4}$

$= \frac{5}{4}$

❐

2.4 เทคนิคของการหาลิมิต (Techniques for Finding Limit)

สรุปเทคนิคในการหา $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ มีดังนี้

1. หาลิมิตของ f(x) โดยการแทนค่า นั่นคือ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$
2. ถ้าไม่สามารถลิมิตของ f(x) โดยการแทนค่า นั่นคือ ลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ในกรณีนี้

จะต้องใช้เทคนิคดังต่อไปนี้

2.1 วิธีแยกตัวประกอบ

2.2 การคูณสังยุค (Conjugate)

ตัวอย่าง 2.13 จงหา $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

วิธีทำ ไม่สามารถหาลิมิตโดยการแทนค่า $x = -3$ เพราะว่าลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -3} (x^2 + x - 6) = 0$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$$

$$\lim_{x \to -3} (x + 3) = 0$$

ในกรณีนี้ ใช้การแยกตัวประกอบ เพราะว่า $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ จะได้

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x + 3)}$$

$$= \lim_{x \to -3} (x - 2) = -5$$

ตัวอย่าง 2.14 จงหา $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

วิธีทำ ไม่สามารถหาลิมิตโดยการแทนค่า $x = 1$ เพราะว่าลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + x - 2) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$$

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - x) = 0$$

ในกรณีนี้ ใช้การแยกตัวประกอบทั้งเศษและส่วนแล้วตัดตัวร่วม จะได้

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x+2)}{x} = \frac{3}{1} = 3$$

ตัวอย่าง 2.15 จงหา $\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$

วิธีทำ ไม่สามารถหาลิมิตโดยการแทนค่า $h=0$ เพราะว่าลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ อย่างไรก็ตามสามารถหาตัวประกอบมาคูณทั้งเศษและส่วน ในที่นี้คือ $\sqrt{2+h}+\sqrt{2}$ ซึ่งเรียกว่า สังยุคของ $\sqrt{2+h}-\sqrt{2}$ แล้วจัดรูป ได้ดังนี้

$$\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} \times \frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} \quad \text{เมื่อ} \quad h\neq0$$

ดังนั้น $\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{1}{(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2+0}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ตัวอย่าง 2.16 จงหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\lim_{x\to6}\frac{x-6}{x^2-36}$

2) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$

3) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

วิธีทำ

1) ลิมิตของเศษและลิมิตของส่วนต่างเท่ากับศูนย์ เมื่อ $x \to 2$ ดังนั้น จึงต้องแยกตัวประกอบเพื่อหาลิมิต ดังต่อไปนี้

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{x^2-36} = \lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)(x+6)}$$

$$= \lim_{x\to 6}\frac{1}{(x+6)}$$

$$= \frac{1}{(6+6)} = \frac{1}{12}$$

2) เช่นเดียวกับข้อ 1. ลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x-1)}{(x+3)}$$

$$= \frac{-2-1}{-2+3} = -3$$

3) เช่นเดียวกับข้อ 1. ลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{1}{(4+4)(2+2)} = \frac{1}{32}$$

ตัวอย่าง 2.17 ให้ $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$ จงหา

1) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

วิธีทำ

1) จากบทนิยามของค่าสัมบูรณ์ จะได้ว่า $|x-2| = x-2$ ถ้า $x > 2$ และ $|x-2| = -(x-2)$ ถ้า $x < 2$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2+x-6}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{5}$$

2) $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x^2+x-6}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{(x+3)} = -\frac{1}{5}$$

3) จากข้อ 1) และข้อ 2) จะได้ว่า $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

❐

ตัวอย่าง 2.18 ให้ $f(x) = \begin{cases} x^2+3 &, \ x < 1 \\ 4x^3 &, \ x \geq 1 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x\to 1} f(x)$

วิธีทำ (พิจารณาลิมิตทางซ้ายของ x=1)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2+3$$

$$= (1)^2 + 3 = 4$$

(พิจารณาลิมิตทางขวาของ x=1)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 4x^3$$

$$= 4(1)^3 = 4$$

จะได้ว่า $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

❐

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\lim\limits_{x\to 4} x(x-6)$

2) $\lim\limits_{x\to 1/3}(3x-1)$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-3x+1)$

4) $\lim\limits_{x\to -1}(x^6-12x+1)$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(x^4+17x+2)$

6) $\lim\limits_{x\to 3}(5-4x)^2$

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+1}{3x^5+4}$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

10) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{(x+2)^2}$

11) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{3x}{x+4}+\dfrac{8}{x+4}\right)$

12) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-3x-1}$

13) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

14) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{2-\sqrt{x}}$

15) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

16) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{x-7}$

17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-3x+2}$

18) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$

19) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

2. จงหาลิมิตด้านเดียวของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x}{x-3}$

2) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+6}{x^2-36}$

3) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{x^2-4}$

4) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{3-x}{x^2-2x-8}$

5) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{|x-2|}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-2}{|x-2|}$

7) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

8) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x-3}}$

9) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|x^2-1|}{x+1}$

10) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

3. จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) ให้ $f(x) = \begin{cases} 1 & , \; x \neq 0 \\ 3 & , \; x = 0 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x \to 0} f(x)$

2) ให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , \; x \neq 4 \\ -x - 3 & , \; x = 4 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x \to 4} f(x)$

3) ให้ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & , \; x \geq 2 \\ \dfrac{(2x+1)}{2} & , \; x < 2 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x \to 2} f(x)$

4) ให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & , \; x \geq 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & , \; x < 3 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x \to 3} f(x)$

5) ให้ $f(x) = \begin{cases} (3x+1)^2 & , \; x > 1 \\ 2 & , \; x = 1 \\ 9x^2 + 7 & , \; x < 1 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x \to 1} f(x)$

2.5 ลิมิตอนันต์และลิมิตที่อนันต์

2.5.1 ลิมิตอนันต์

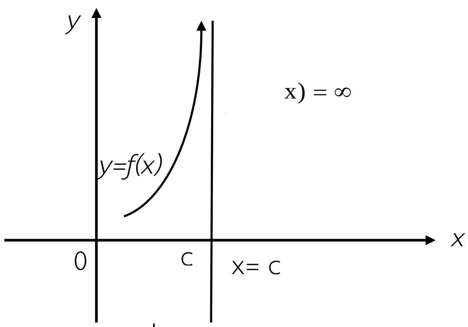
บางฟังก์ชัน ในขณะที่ x เข้าใกล้ค่าหนึ่งค่าใด อาจจะเข้าใกล้แบบสองด้านหรือด้านเดียว ทำให้ค่าของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต หรือลดลงอย่างไม่มีขอบเขต ลิมิตในลักษณะนี้เรียกว่า ลิมิตอนันต์ (infinite limits)

บทนิยาม 2.5.1 ถ้า $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต ในขณะที่ $x \to c^-$ หรือ $x \to c^+$ จะกล่าวว่าลิมิตของ $f(x)$ เข้าใกล้ (บวก) อนันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

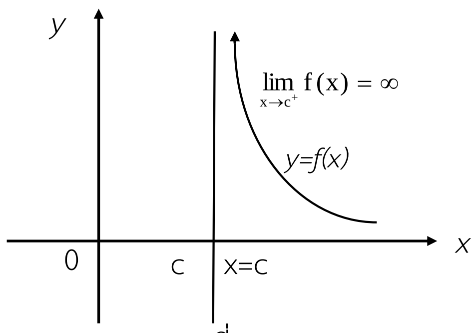
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$$

ถ้า $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$ แล้ว จะกล่าวว่า $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$

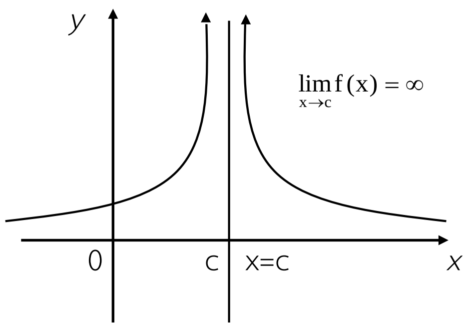
จากบทนิยาม 2.5.1 สามารถเขียนกราฟแสดงได้ดังรูปที่ 2.5.1 - 2.5.3



รูปที่ 2.5.1



รูปที่ 2.5.2



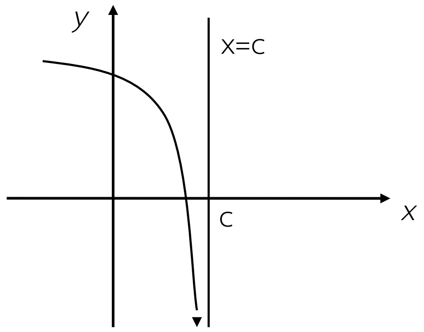
รูปที่ 2.5.3

บทนิยาม 2.5.2 ถ้า $f(x)$ มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขต ในขณะที่ $x \to c^-$ หรือ $x \to c^+$ จะกล่าวว่าลิมิตของ $f(x)$ เข้าใกล้ (ลบ) อนันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

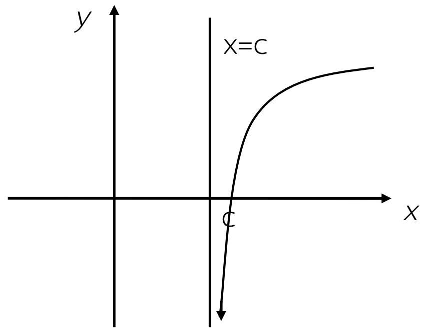
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$$

ถ้า $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$ และ $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ แล้ว จะกล่าวว่า $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$

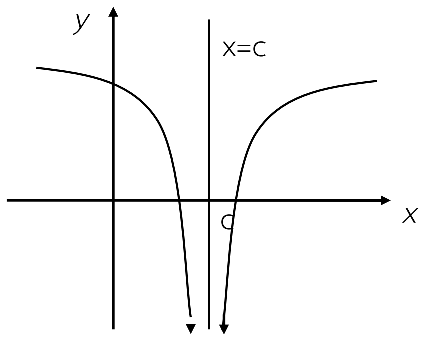
จากบทนิยาม 2.5.2 สามารถเขียนกราฟแสดงได้ดังรูปที่ 2.5.4 - 2.5.6



รูปที่ 2.5.4



รูปที่ 2.5.5



รูปที่ 2.5.6

ตัวอย่าง 2.19 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ จงหา $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ และ $\lim_{x\to -2^-} f(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ เมื่อ x เข้าใกล้ -2 ทางขวา ค่าของ x+2 เข้าใกล้ 0 แต่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ จึงเป็นจำนวนบวกที่มีค่าสูงมาก นั่นคือ $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{3}{x+2} = \infty$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{3}{x+2} = -\infty$ ❐

ตัวอย่าง 2.20 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ จงหา $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

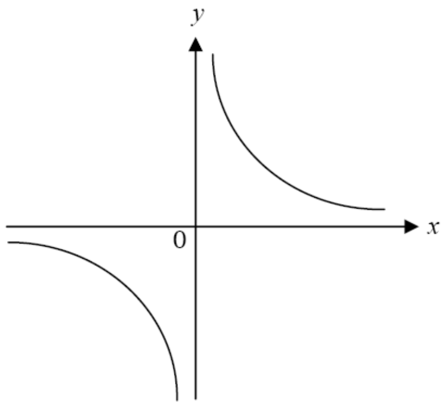
วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{1}{x^2}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางขวา ค่าของ $\frac{1}{x^2}$ เข้าใกล้ 0 แต่เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $f(x) = \frac{1}{x^2}$ จึงเป็นจำนวนบวกที่มีค่าสูงมาก นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$

และเมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย ทำให้ค่าของ $\frac{1}{x^2}$ เข้าใกล้ 0 แต่เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าสูงมาก ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$ จากบทนิยาม 2.5.1 จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ❐

2.5.2 ลิมิตที่อนันต์

ลิมิตที่อนันต์ (limits at infinite) เป็นลิมิตของฟังก์ชันในขณะที่ x มีค่าเพิ่มอย่างไม่มีขีดจำกัดหรือ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ ในรูปที่ 2.5.1



รูปที่ 2.5.1

จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด ค่าของฟังก์ชัน f(x) จะเข้าใกล้ 0 กรณีนี้เรากล่าวว่า ลิมิตของ f(x) เท่ากับ 0 เมื่อ x ลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

เมื่อ x เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด ค่าของฟังก์ชัน f(x) จะเข้าใกล้ 0 เช่นกัน กรณีนี้เรากล่าวว่า ลิมิตของฟังก์ชัน f(x) เท่ากับ 0 เมื่อ x เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

สรุปความหมายของสัญลักษณ์ ดังนี้

1. เมื่อ x ลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด เขียนแทนด้วย $x \to -\infty$
2. เมื่อ x เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด เขียนแทนด้วย $x \to \infty$

จากความหมายข้างสามารถเขียนลิมิตที่อนันต์ได้ดังนี้

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ หมายถึง f(x) มีค่าเข้าใกล้ค่าคงที่ L เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นๆ ไม่มีขีดจำกัด
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ หมายถึง f(x) มีค่าเข้าใกล้ค่าคงที่ L เมื่อ x มีค่าลดลงๆ ไม่มีขีดจำกัด

ทฤษฎีบท 2.5.1 ให้ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L_2$ โดยที่ L_1 และ L_2 เป็นจำนวนจริง

1. $\lim_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = L_1 + L_2$
2. $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-g(x)) = L_1 - L_2$
3. $\lim_{x\to+\infty} (f(x)\cdot g(x)) = L_1L_2$
4. $\lim_{x\to+\infty} kf(x) = kL_1$; (k เป็นค่าคงที่ใดๆ)
5. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ ถ้า $L_2 \neq 0$
6. $\lim_{x\to+\infty} [f(x)]^n = [L_1]^n$
7. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ โดยที่ $L_1 > 0$ เมื่อ n เป็นเลขคู่

ทฤษฎีบท 2.5.2 ถ้า n เป็นจำนวนตรรกยะ และ A เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ แล้ว

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{A}{x^n} = 0$$

และ ถ้า x^n นิยามเมื่อ $x < 0$ แล้ว $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{A}{x^n} = 0$

ทฤษฎีของลิมิตที่อนันต์คล้ายกับทฤษฎีบท 2.2 และเทคนิคการหาลิมิตก็คล้ายกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.21 จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(5 - \dfrac{2}{x^2}\right)$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$

วิธีทำ

1) ใช้ทฤษฎีบท 2.5.1 ข้อ 1 เราสามารถเขียนได้เป็น

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5 - \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 5 - \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2}$$

$$= 5 - 0 = 5$$

2) เนื่องจากทั้งเศษและส่วนเข้าใกล้ $+\infty$ เมื่อ x เข้าใกล้ $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) \begin{array}{l} \nearrow \lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty \\ \searrow \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty \end{array}$$

เราสามารถแก้ปัญหาโจทย์ข้อนี้ โดยการหารทั้งเศษและส่วนด้วย x หลังจากหารแล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน สามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} \\
&= \frac{2-0}{1+0} = 2
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.22 จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5}{3x^2+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^{10}-x^7}{10x^{10}+3x^3}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^4+7x-3}{3x^3-2x^2}$

วิธีทำ

1) หารทั้งเศษและส่วนด้วย x^2 จะได้

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}}{\lim_{x\to+\infty}3+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{0+0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0$$

2) หารทั้งเศษและส่วนด้วย x^{10} จะได้

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^{10}-x^7}{10x^{10}+3x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^{10}-x^7}{x^{10}}}{\frac{10x^{10}+3x^3}{x^{10}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{1}{x^3}}{10+\frac{3}{x^7}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty}4-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}}{\lim_{x\to+\infty}10+\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^7}}$$

$$= \frac{4+0}{10+0} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

3) หารทั้งเศษและส่วนด้วย x^3 จะได้

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4+7x-3}{3x^3-2x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{5x^4+7x-3}{x^4}}{\dfrac{3x^3-2x^2}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{5+\dfrac{7}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}5+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x^3}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^4}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{5+0-0}{0-0} = \frac{5}{0}$$

สามารถสรุปได้ว่า ลิมิตหาค่าไม่ได้ นั่นคือ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^4+7x-3}{3x^3-2x^2} = +\infty$

ตัวอย่าง 2.23 จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{25x^2-7x}{x^2-15}}$

วิธีทำ สำหรับ $x \neq 0$ จะได้

$$\frac{25x^2-7x}{x^2-15} = \frac{\dfrac{(25x^2-7x)}{x^2}}{\dfrac{(x^2-15)}{x^2}} = \frac{25-7/x}{1-15/x^2}$$

และจาก**ทฤษฎีบท 2.5.2** จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{15}{x^2} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{25x^2-7x}{x^2-15}} = \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(25-7/x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(1-15/x^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{25-0}{1-0}}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาลิมิตอนันต์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{5x+7}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+5}{3x^2+1}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{14x}{5+7x}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+7x-3}{3x^2+2}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-9}{x^2-4x-5}$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{11x+2}{2x^3-1}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{45x^3-96}{23x^4-43x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{100x^5+2}{214x^7-89x^4}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^5+4}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{36x^3-12x-6}{(x+2)^2}$

13) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x}{x-1}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{109x^4-79x^3}{78x^2-112}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{28x^5+9x^3}{15x^2-31}$

16) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3-4x+1}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{3x-5}{x-2}}$

18) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{\sqrt{4x^2-9}}$

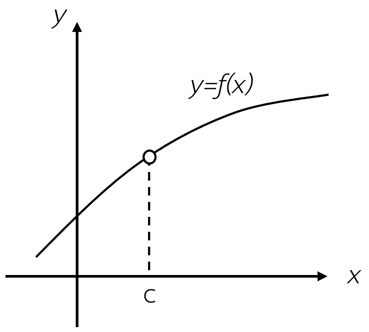
19) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{3x^4+16x^2-1}{2x^4+21}}$

20) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-3}}{x-2}$

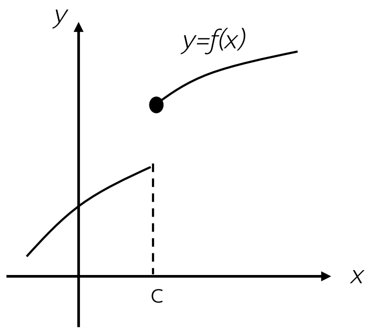
2.6 ความต่อเนื่อง (Continuity)

ความต่อเนื่องในทางคณิตศาสตร์มีความหมายเช่นเดียวกับความต่อเนื่องที่ใช้กันอยู่ทั่วๆ ไป กล่าวคือ การที่เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ x = c หมายความว่า กราฟของ f จะไม่ขาดตอน (Unbroken) ที่ x = c กราฟของ f อาจจะเกิดความไม่ต่อเนื่อง ณ x = c ได้ 3 แบบ ดังนี้

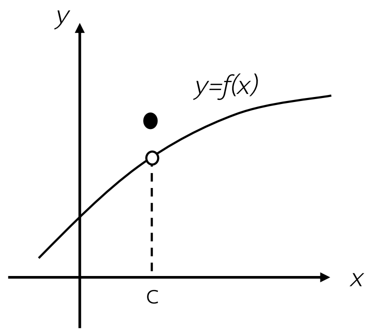
1. กราฟของ f ไม่นิยามที่ x = c ดังรูป 2.6.1
2. ลิมิตของ f หาค่าไม่ได้ เมื่อ x เข้าใกล้ c ดังรูป 2.6.2
3. ลิมิตของ f หาค่าได้ (Exist) ที่ x = c แต่ไม่เท่ากับค่า f(c) ดังรูป 2.6.3



ดังรูป 2.6.1



ดังรูป 2.6.2



ดังรูป 2.6.3

บทนิยาม 2.6.1 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ c ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$
เรียกฟังก์ชัน f ว่า ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c

จากบทนิยาม 2.6.1 สามารถกล่าวได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่ c ก็ต่อเมื่อ f ต้องสอดคล้องเงื่อนไขทั้ง 3 ข้อ ต่อไปนี้

1. $f(c)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

ในกรณีที่ f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่ง จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ c

ตัวอย่าง 2.24 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่ -1 หรือไม่

วิธีทำ (1) คำนวณหา $f(-1)$ จะได้

$$f(-1) = \frac{(-1)^2-4}{(-1)-2} = \frac{-3}{-3} = 1$$

(2) คำนวณหา $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ จะได้

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(-1)^2-4}{(-1)-2}$$

$$= \frac{-3}{-3} = 1$$

(3) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) = 1$ ดังนั้น f มีความต่อเนื่องที่ -1

ตัวอย่าง 2.25 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & ; \quad x \neq 3 \\ x+1 & ; \quad x = 3 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่ 3 หรือไม่

วิธีทำ (1) คำนวณหา $f(3)$ จะได้ $f(3) = 3+1 = 4$

(2) คำนวณหา $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ จะได้

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3}(x+1)$$

$$= 3+1 = 4$$

(3) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = 4$ ดังนั้น f มีความต่อเนื่องที่ 3

ตัวอย่าง 2.26 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & ; \quad x \leq 2 \\ 5+\dfrac{4}{x} & ; \quad x > 2 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่ 2 หรือไม่

วิธีทำ (1) คำนวณหา $f(2)$ จะได้ $f(2) = 2(2)+2 = 6$

(2) คำนวณหา $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ จะต้องหาลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา ดังนี้

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(2x+2) = 2(2)+2 = 6$$

และ $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(5+\frac{4}{x}) = 5+\frac{4}{2} = 7$$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 2^{=}} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ 2

ตัวอย่าง 2.27 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} |2-x| & ; \quad x < 1 \\ x^2+3x & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่ 1 หรือไม่

วิธีทำ (1) คำนวณหา $f(1)$ จะได้ $f(1) = (1)^2 + 3(1) = 4$

(2) คำนวณหา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ จะได้

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} |2-x|$$

$$= \lim_{x\to 1^-} -(2-x) = -(2-1) = -1$$

และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+3x) = (1)^2 + 3(1) = 4$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 1^{=}} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ 1

ตัวอย่าง 2.28 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; \quad x = 3 \\ 2ax & ; \quad x \neq 3 \end{cases}$

จงหาค่าของ a ซึ่งทำให้ f ต่อเนื่องที่ 3

วิธีทำ ต้องการให้ f ต่อเนื่องที่ 3 นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$

จะได้ $f(3) = 3^2 - 1 = 8$

และ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} 2ax = 2(3)a = 6a$

ดังนั้น ให้ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$

$6a = 8$

$$a = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

บทนิยาม 2.6.2 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b) ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน (a,b) นั่นคือ ถ้า $c \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c

บทนิยาม 2.6.3 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน (a,b) และ
2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ และ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

บทนิยาม 2.6.5 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงครึ่งเปิด $(a,b]$ ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน (a,b) และ
2. $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

บทนิยาม 2.6.4 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงครึ่งเปิด $[a, b)$ ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน (a, b) และ
2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

บทนิยาม 2.6.6 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, \infty)$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ในกรณีนี้เรียกว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ตัวอย่าง 2.29 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-2, 2]$

วิธีทำ 1. จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $(-2, 2)$

ให้ $c \in (-2, 2)$ จะได้ว่า

(1) $f(c) = \sqrt{4 - c^2}$

(2) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - c^2}$

จะได้ว่า $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $(-2, 2)$

2. จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงครึ่งเปิด $[-2, 2)$

(1) $f(-2) = \sqrt{4 - (-2)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0$

(2) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \sqrt{4 - (-2)^2} = 0$

จะได้ว่า $\lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงครึ่งเปิด $[-2, 2)$

3. จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงครึ่งเปิด $(-2, 2]$

(1) $f(2) = \sqrt{4 - 2^2} = \sqrt{4 - 4} = 0$

(2) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \sqrt{4 - 2^2} = 0$

จะได้ว่า $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงครึ่งเปิด $(-2, 2]$

ดังนั้น จากข้อ 1, 2 และ 3 และจากบทนิยาม 2.6.3 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-2, 2]$

ตัวอย่าง 2.30 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & ; \quad x<-1 \\ x+4 & ; \quad -1 \le x < 2 \\ 3x-5 & ; \quad x \ge 2 \end{cases}$

จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน f

วิธีทำ เราจะเห็นได้ชัดว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(-\infty,-1)$ และ $(-1,2)$

พิจารณา $x=-1$ $f(-1) = (-1)^2+2 = 3$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-}(x^2+2) = (-1)^2+2 = 3$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+}(x+4) = (-1)+4 = 3$$

จะได้ว่า $\lim_{x\to-1} f(x) = f(-1) = 3$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ $x=-1$

พิจารณา $x=2$ $f(2) = 3(2)-5 = 1$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}(x+4) = 2+6 = 6$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}(3x-5) = 3(2)-5 = 1$$

นั่นคือ $\lim_{x\to2^-} f(x) \ne \lim_{x\to2^+} f(x)$ จะได้ว่า $\lim_{x\to2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

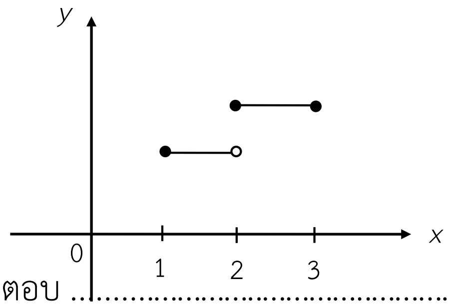
ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=2$

สรุป f ต่อเนื่องที่ทุกๆ ค่าของ x ยกเว้นจุด $x=2$

แบบฝึกหัด 2.5

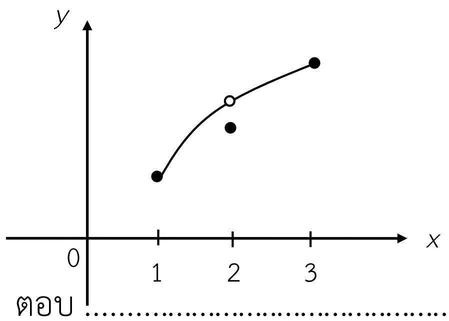
1. จากกราฟของฟังก์ชัน f จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงใด

1.1)



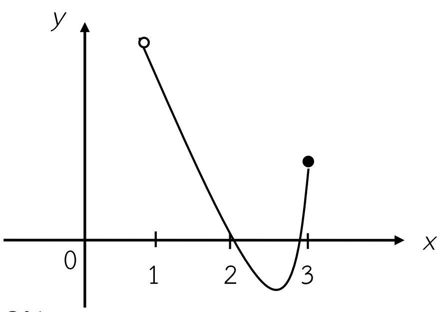
ตอบ ………………………………………………

1.2)



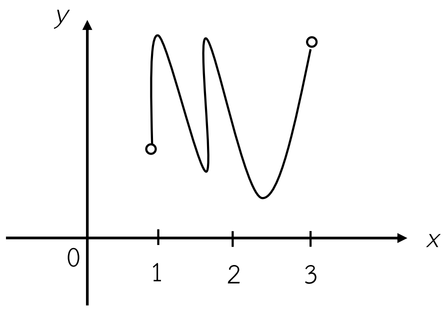
ตอบ ………………………………………………

1.3)



ตอบ ………………………………………………

1.4)



ตอบ ………………………………………………

2. จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1) $f(x) = 2x^2 + x - 2$ ที่ $x = 2$

2.2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ ที่ $x = -2$

2.3) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ ที่ $x = 3$

2.4) $f(x) = \dfrac{x-2}{2x^2-1}$ ที่ $x = 4$

2.5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}$ ที่ $x = 9$

2.6) $f(x) = \begin{cases} x+1 & ;\ x < -3 \\ 2x+4 & ;\ x \geq -3 \end{cases}$ ที่ $x = -3$

2.7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & ;\ x \neq 2 \\ x+1 & ;\ x = 2 \end{cases}$ ที่ $x = 2$

2.8) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & ; \ x \le 4 \\ 7+\dfrac{16}{x} & ; \ x > 4 \end{cases}$ ที่ $x = 4$

2.9) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & ; \ x < 0 \\ (x+1)^3 & ; \ x \ge 0 \end{cases}$ ที่ $x = 0$

2.10) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4} & ; \ x \ne 4 \\ 3 & ; \ x = 4 \end{cases}$ ที่ $x = 4$

3. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-4, 4]$

4. จงหาค่าของ c ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

4.1) $f(x) = \begin{cases} 7x-2 & ; \ x \ne 1 \\ cx^2 & ; \ x = 1 \end{cases}$

4.2) $f(x) = \begin{cases} cx+1 & ; \ x \le 3 \\ cx^2-1 & ; \ x > 3 \end{cases}$